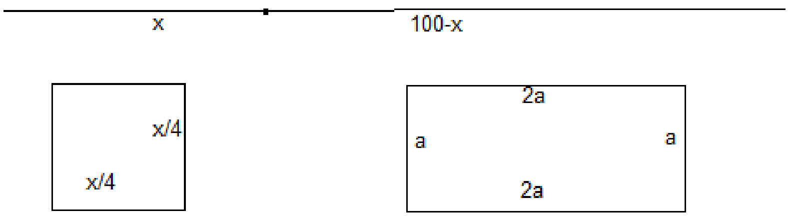
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Junio 2011 específico1

[2'5 puntos] Un alambre de 100 m de longitud se divide en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un cuadrado y con el otro un rectángulo cuya base es doble que su altura. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos con la condición de que la suma de las áreas de estas dos figuras sea mínima.

Solución

Es un problema de optimización



Función a optimizar: Área = $(x/4)^2 + a.(2a) = (x/4)^2 + 2a^2$
Relación entre las variables $a+a+2a+2a = 100 – x$, de donde $6a = 100-x$, y $a = (100-x)/6$
Área = $A(x) = (x/4)^2 + 2((100-x)/6)^2$

Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) > 0$, $x = b$ es un mínimo de $V(r)$

$A(x) = (x/4)^2 + 2((100-x)/6)^2$
$A'(x) = 2.(x/4)(1/4) + 2.2((100-x)/6)(-1/6) = (x/8) – (100-x)/9$.
De $A'(x) = 0$, tenemos $(x/8) – (100-x)/9 = 0$, es decir $9x = 800-8x$, luego $x = 800/17$ m.
Las longitudes de los trozos son $x = 800/17$ m. y $100 – x = 100 - 800/17 = 900/17$ m.

Veamos que es un mínimo es decir $A''(800/17) > 0$

$A'(x) = (x/8) – (100-x)/9$.
$A''(x) = 1/8 + 1/9 >0$, independientemente del valor de “x”, luego es un mínimo.

Ejercicio 2 opción A, modelo Junio 2011 específico1

[2'5 puntos] Determina la función $f :(0,+\infty) \rightarrow R$ tal que $f''(x) = 1/x$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto P(1,1).

Solución

El teorema fundamental del cálculo integral nos dice que si f(x) es continua en [a,b] entonces la función $\int_a^x f(t)dt$ es derivable y su derivada es f(x).
En nuestro caso $f'(x) = \int f''(x)dx$ y $f(x) = \int f'(x)dx$
Como nos dicen que la gráfica de f tiene tangente horizontal en (1,1), sabemos que $f'(1) = 0$.
Como nos dicen que pasa por el punto (1,1), sabemos que $f(1) = 1$.
$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (1/x)dx = \ln|x| + K$
De $f'(1) = 0$ resulta $0 = \ln(1) + K = 0 + K$, de donde $K = 0$ y $f'(x) = \ln(x)$
$f(x) = \int f'(x)dx = \int \ln(x)dx = ** = x\ln|x| - x + M$
De $f(1) = 1$ resulta $1 = 1.\ln(1) – 1 + M = 0 – 1 + M$, de donde $M = 2$ y $f(x) = x\ln|x| - x + 2$.

Veamos que $I = \int \ln(x)dx = x\ln|x| - x$, que es una integral por partes ($\int udv = uv - \int vdu$)
$u = \ln(x)$ y $dv = dx$, de donde $du = (1/x)dx$ y $v = x$
$I = \int \ln(x)dx = x\ln|x| - \int x.(1/x)dx = x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x$.

Ejercicio 3 opción A, modelo Junio 2011 específico1

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = 1/2$ y $|B| = -2$.
Halla:
(a) [0'5 puntos] $|A^3|$.
(b) [0'5 puntos] $|A^{-1}|$.

(c) [0'5 puntos] |-2A|.
(d) [0'5 puntos] $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.
(e) [0'5 puntos] El rango de B.

Solución

Sabemos que si A y B son cuadradas entonces |AB| = |A||B|, $|A^{-1}| = 1/|A|$ (de A.B = I, y |I| = 1), $|k.A_n| = k^n.|A|$, $|A^t| = |A|$, y si $|B_3| \neq 0$, rango(B) = 3.

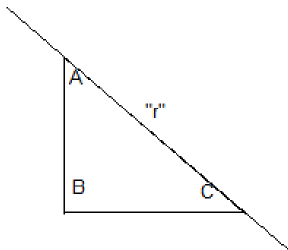
(a) $|A^3| = |A.A.A| = |A|.|A|.|A| = (1/2).(1/2).(1/2) = 1/8$.
(b) $|A^{-1}| = 1/|A| = |A^{-1}| = 1/(1/2) = 2$
(c) $|-2A| = (-2)^3.|A| = -8.(1/2) = -4$.
(d) $|AB^t| = |A||B^t| = |A||B| = (1/2)(-2) = -1$.
(e) Como $|B_3| = -2 \neq 0$, tenemos que rango(B) = 3.

Ejercicio 4 opción A, modelo Junio 2011 específico1

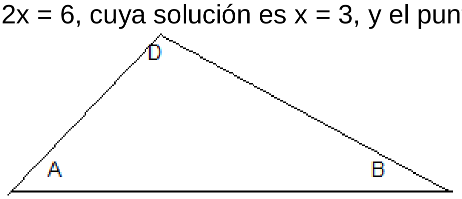
Considera los puntos A(1,0,2) y B(1,2,-1).
(a) [1'25 puntos] Halla un punto C de la recta de ecuación $(x-1)/3 = y/2 = z$ que verifica que el triángulo de vértices A, B y C tiene un ángulo recto en B.
(b) [1'25 puntos] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y D, donde D es el punto de corte del plano de ecuación $2x-y+3z = 6$ con el eje OX .

Solución

(a)



A(1,0,2), B(1,2,-1).
Como el punto C es de la recta “r”, ponemos lar recta “r” en paramétricas
$x = 1 + 3\lambda$
$y = 0 + 2\lambda$
$z = 01 + \lambda$, con λ número real.
El punto genérico C de “r” tiene de coordenadas $C(1 + 3\lambda, 2\lambda, \lambda)$
Como me dicen que el triángulo es rectángulo en B, los vectores **BA** y **BC** son perpendiculares, por tanto su producto escalar es cero, es decir **BA•BC** = 0
BA = (0, -2, 3); **BC** = $(3\lambda, 2\lambda-2, \lambda+1)$
BA•BC = 0 = $(0, -2, 3)\bullet(3\lambda, 2\lambda-2, \lambda+1) = -4\lambda+4+3\lambda+3 = -\lambda+7 = 0$, de donde $\lambda = 7$, y el punto pedido es C(1 + 3(7), 2(7), (7)) = C(22, 14, 7)
(b)
El punto D es la intersección de los planos
$2x-y+3z = 6$
$y = 0$
$z = 0$, de donde obtenemos $2x = 6$, cuya solución es $x = 3$, y el punto D es D(3,0,0).



A(1,0,2), B(1,2,-1) y D(3,0,0).
Sabemos que el área de un triángulo ABC es (1/2) del área del paralelogramo que determinan dos vectores con origen común, en nuestro caso el **AB** y **AD**. También sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial que determinan dichos vectores (**||AB x AD||.**

Resumiendo: Área triángulo ABC = (1/2).||**AB x AD**|| = (1/2).$\sqrt{(4^2+6^2+4^2)}$ = (1/2).$\sqrt{(68)}$ u^2.

AB = (0, 2. -3); **AD** = (2, 0, -2); **ABxAD**= $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ Adjunto primera fila = **i**(-4)-**j**(6)+**k**(-4) = (-4,-6,-4)

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Junio 2011 específico1

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = 4 – x^2$

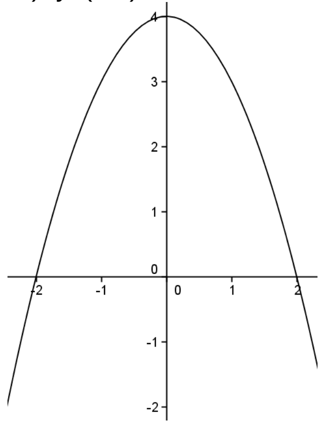
(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

(b) [1'5 puntos] Determina el punto de la gráfica en el que la recta tangente es perpendicular a la recta x + 2y – 2 = 0.

Solución

(a)

Aunque no lo piden la gráfica de $4 – x^2$ es exactamente igual que la de la parábola $– x^2$ (ramas hacia abajo) pero desplazada 4 unidades hacia arriba en el eje OY (vértice en (0,4) y se observa que corta al eje OX en (-2,0) y (2,0), son las soluciones de $4 – x^2 = 0$)



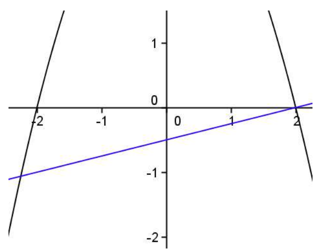
La recta normal a la gráfica de f en el punto x = 2 tiene de ecuación “y-f(2) = [-1/f’(2)](x-2)”

$f(x) = 4 – x^2$, de donde f(2) = 4-4 = 0

f(x) = –2x, de donde f(2) = -2(2) = -4, por tanto [-1/f’(2)] = [-1/-4] = 1/4.

La recta normal pedida es “y-0 = (1/4)(x-2)”, operando queda y = (1/4)x-(1/2)

A continuación (no lo piden) tenéis dibujada la gráfica de f (en negro) y la de su recta normal en x = 2 (en azul).



(b)

La pendiente genérica de la recta tangente a la gráfica de f es f’(x) = -2x.

La pendiente de la recta x+2y-2=0, es decir y = -x/2 + 2 es y’ = (-1/2).

Sabemos que la relación de la pendiente de una recta “m” y la de su recta normal “m’ ” es m.m’=-1, es nuestro caso la pendiente de la recta normal a la recta es m’ = (-1)/(-1/2) = 2, por tanto igualando la pendiente genérica de f con la de la normal de la recta nos queda -2x=2, de donde x = -1; y el punto pedido es (-1,f(-1)) = (-1, 3).

Ejercicio 2 opción B, modelo Junio 2011 específico1

[2'5 puntos] Calcula: $\int (x^3 + x^2).dx/(x^2 + x – 2)$

Solución

I = $\int (x^3 + x^2).dx/(x^2 + x – 2)$, es una integral racional, pero como el numerado es de grado mayor que el denominador tenemos que efectuar antes la división entera.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 + 2x & x \\ \hline 2x & \end{array}$$

$I = \int ((Cx) + R(x)/(d(x))dx = \int x dx + \int (2x).dx/(x^2 + x - 2) = x^2/2 + I_1$.
La integral $I_1 = \int (2x).dx/(x^2 + x - 2)$, es la racional. Si resolvemos $x^2 + x - 2 = 0$, obtenemos como soluciones $x = 1$ y $x = -2$.
$I_1 = \int (2x).dx/(x^2 + x - 2) = I_1 = \int Adx/(x-1) + \int Bdx/(x+2) = A.\ln|x-1| + B.\ln|x+2|$
La integral pedida es
$I = x^2/2 + I_1 = x^2/2 + A.\ln|x-1| + B.\ln|x+2| + K$

Sólo nos falta determinar las constantes A y B:

$(2x)/(x^2 + x - 2) = A/(x-1) + B/(x+2) = [A(x+2) + B(x-1)]/ (x^2 + x - 2)$.

Igualando numeradores tenemos $2x = = A.(x+2) + B.(x-1)$.
Para $x = 1$, tenemos $2 = 3A$, de donde $A = 2/3$.
Para $t = -2$, tenemos $-4 = -3B$, de donde $B = 4/3$.

La integral pedida es $I = x^2/2 + I_1 = x^2/2 + A.\ln|x-1| + B.\ln|x+2| + K =$
$= x^2/2 + (2/3).\ln|x-1| + (4/3).\ln|x+2| + K$

Ejercicio 3 opción B, modelo Junio 2011 específico1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [0'5 puntos] Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
(b) [1'25 puntos] Justifica que A es invertible y halla su inversa.
(c) [0'75 puntos) Calcula razonadamente A^{100}.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Hemos visto que $A^3 = -I$.
(b)
La matriz A es invertible si su determinante |A| es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (-1)(1)(-3+4) = -1 \neq 0, \text{ luego A es invertible.}$$

Otra forma de ver lo mismo es utilizar la igualdad del aparatado (a)
De $A^3 = -I$, tenemos $|A^3| = |A.A.A| = |A|.|A|.|A| = (|A|)^3 = |-I_3| = (-1)^3. |I_3| = (-1)(1) = 1 \neq 0$
La inversa de A es $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$

$|A| = -1$; $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(c)

Utilizando la igualdad del apartado (a) $A^3 = -I$, podemos calcular A^{100}.

$$A^{100} = A^{99}.A = (A^3)^{33}.A = (-I)^{33}.A = (-1)^{33}.(I)^{33}.A = (-1).I.A = (-1).A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción B, modelo Junio 2011 específico1

[2'5 puntos] Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$3x - y + z - 4 = 0, \qquad x - 2y + z - 1 = 0 \qquad y \qquad x + z - 4 = 0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,1,-1), es paralela al plano π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3 .

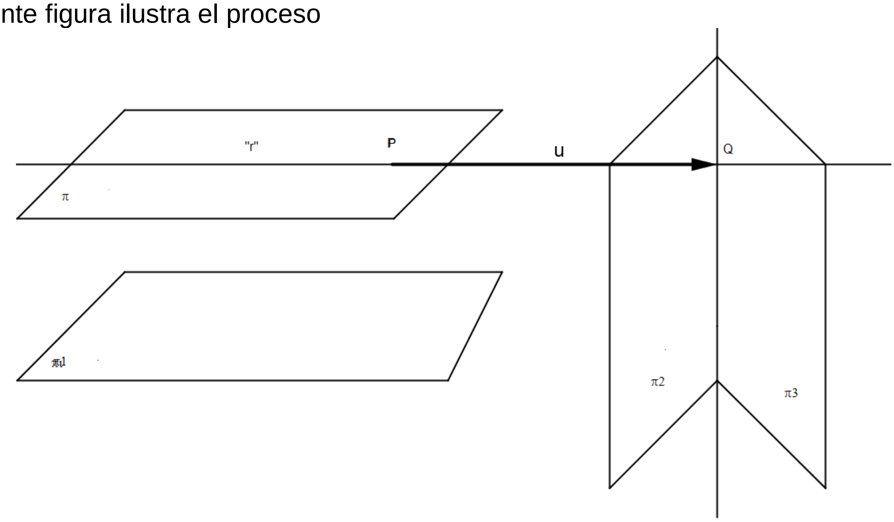
Solución

Calculamos el plano π paralelo al plano π_1 que pasa por P(3,1,-1).

Como el plano π corta a los planos π_2 y π_3, resolvemos el sistema $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$ y $\pi_3 = 0$, y obtendremos el punto Q.

La recta pedida es la que pasa por los puntos P y Q. Utilizaremos el punto P y como vector de dirección el **u** = **PQ**

La siguiente figura ilustra el proceso



Calculamos el plano π paralelo al plano π_1 que pasa por P(3,1,-1).

Un plano paralelo al π_1 es $3x-y+z+K=0$. Como pasa por P(3,1,-1), tenemos $3(3)-(1)+(-1)+K=0$, de donde $K = -7$, y el plano π es $3x-y+z-7=0$.

Para obtener el punto Q, resolvemos el sistema siguiente:

$3x - y + z - 7 = 0$ A la ecuación 1ª le restamos la ecuación 3ª

$x - 2y + z - 1 = 0$ A la ecuación 2ª le restamos la ecuación 3ª, quedándonos

$x + z - 4 = 0$.

$2x - y + 0 - 3 = 0$

$0 - 2y + 0 + 3 = 0$, de donde $y = 3/2$

$x + z - 4 = 0$.

Entrando en la 1ª tenemos $2x - 3/2 - 3 = 0$, de donde $x = 9/4$

Entrando en la 3ª tenemos $9/4 + z - 4 = 0$, de donde $z = 7/4$,por tanto el punto Q buscado es $Q(x,y,z) = Q(9/4,3/2,7/4)$

La recta pedida pasa por el punto P(3,1,-1) y uno de sus vectores directores es el **PQ** = (9/4 - 3, 3/2 - 1, 7/4 + 1) = (-3/4, 1/2, 11/4). Otro vector sería **v** = (-3,2,11)

La recta buscada es " (x-3)/(-3) = (y-1)/2 = (z+1)/11 "